

# 1. Präsenzübung zur Fortgeschrittenen Quantentheorie, SS 2010

(zu bearbeiten am Dienstag, 13.04.2010)

## Aufgabe P1 Dichtematrix eines Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchens

Die Dichtematrix  $\rho$  eines Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchens kann mit den Pauli-Matrizen  $\sigma_i$ ,  $i = x, y, z$ , und der Identität  $\mathbb{1}$  entwickelt werden als

$$\rho = a \mathbb{1} + b \vec{s} \cdot \vec{\sigma}.$$

- Bestimmen Sie die Koeffizienten  $a$  und  $b$  aus der Bedingung  $\text{tr} \rho = 1$ , sowie der Forderung  $|\vec{s}| = 1$  für einen reinen Zustand.
- Was gilt für den Betrag des sogenannten Bloch-Vektors  $\vec{s}$ , falls  $\rho$  gemischt ist?
- Wie sind die Bloch-Vektoren  $\vec{s}$  und  $\vec{s}^\perp$  zweier reiner orthogonaler Zustände  $|\psi\rangle$  und  $|\psi^\perp\rangle$  relativ zueinander orientiert?

*Erinnerung:* Die Pauli-Matrizen erfüllen  $\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i \epsilon_{ijk} \sigma_k$ .

## Aufgabe P2 Reine und gemischte Dichtematrizen

- Es sei eine Quelle gegeben, die Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen emittiert, die mit gleicher *Wahrscheinlichkeit* in positiver und negativer  $z$ -Richtung polarisiert sind. Wie lautet die zugehörige Dichtematrix  $\rho_1$ ? Eine andere Quelle emittiere Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen, die mit gleicher Wahrscheinlichkeit in positiver und negativer  $x$ -Richtung polarisiert sind. Was ist hier die Dichtematrix  $\rho_2$ ? Wie erkennen Sie an den Dichtematrizen, dass es sich um ein *statistisches Gemisch* handelt?
- Eine weitere Quelle emittiere eine *Superposition*, die die gleiche *Amplitude* für Spin in positiver und negativer  $z$ -Richtung hat. Wie lautet hier die Dichtematrix  $\rho_3$ , und wie erkennt man an ihr, dass es sich um einen reinen Zustand handelt? Betrachten Sie schließlich den Fall  $\rho_4$ , dass eine Quelle eine Superposition emittiert, die die gleiche Amplitude für Spin in positiver und negativer  $x$ -Richtung hat.

Wie groß ist in den vier Fällen jeweils die Wahrscheinlichkeit, bei einer Spinmessung in  $z$ -Richtung das Ergebnis  $|\uparrow\rangle$  zu finden?

- Betrachten Sie nun zwei aufeinanderfolgende Messungen. Die Emission finde in  $y$ -Richtung statt, und die Teilchen durchlaufen zunächst einen in  $z$ -Richtung orientierten Stern-Gerlach-Apparat, dann einen in  $x$ -Richtung orientierten. Es gibt daher vier mögliche Auftreffpunkte auf einer hinter der zweiten Messung angebrachten Detektorplatte. Geben Sie für die vier oben beschriebenen Quellen jeweils die Wahrscheinlichkeit für die verschiedenen Messergebnisse an, d.h. die relativen Intensitäten der Flecken auf der Detektorplatte.